

6.4. RÓWNANIE WYMIERNE

Równanie wymierne jest to równanie postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$,

gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami
i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Równanie wymierne rozwiązujemy korzystając z twierdzenia:

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0 \text{ i } P(x) \neq 0.$$

Przykład 6.4.1 Rozwiąż równanie: $\frac{3x+2}{3-x} = 2$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $3 - x \neq 0$ $-x \neq -3 / : (-1)$ $x \neq 3$ $D : x \in R \setminus \{3\}$	Określamy dziedzinę równania.
$\frac{3x+2}{3-x} = 2 / \cdot (3-x)$ $3x+2 = 2(3-x)$ $3x+2 = 6-2x$ $3x+2x = 6-2$ $5x = 4 / : 5$ $x = \frac{4}{5}$	Doprowadzamy równanie do równania wielomianowego mnożąc obie strony równania przez $3-x$. Rozwiązujemy otrzymane równanie wielomianowe.
$x = \frac{4}{5} \in D$ Odp. Równanie ma jedno rozwiązanie: $\frac{4}{5}$	Sprawdzamy, czy otrzymany wynik należy do dziedziny równania

Przykład 6.4.2 Rozwiąż równanie: $\frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $x-3 \neq 0$ $x \neq 3$ $D: x \in R \setminus \{3\}$	Określamy dziedzinę równania.
$\frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3} / \cdot (x-3)$ $x+3 = 6$ $x = 6-3$ $x = 3$	Doprowadzamy równanie do równania wielomianowego mnożąc obie strony równania przez $x-3$. Rozwiązujemy otrzymane równanie wielomianowe.
$x = 3 \notin D$ Odp. Równanie nie ma rozwiązania.	Sprawdzamy, czy otrzymany wynik należy do dziedziny równania

Przykład 6.4.3 Rozwiąż równanie: $\frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenia: $5x+10 \neq 0$ $x^2-4 \neq 0$ $5x \neq -10 / :5$ $a=1, b=0, c=-4$ $x \neq -2$ $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-4) = 16$ $x_1 = \frac{0 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$ $x_2 = \frac{0 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ $D: x \in R \setminus \{-2, 2\}$	Określamy dziedzinę równania. Przy rozwiązywaniu założenia $x^2-4 \neq 0$ korzystamy ze wzorów: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\frac{2}{5x+10} = \frac{-3}{x^2-4}$ $2(x^2-4) = -3(5x+10)$ $2x^2 - 8 = -15x - 30$ $2x^2 + 15x + 22 = 0$ $a=2, b=15, c=22$ $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 22 = 225 - 176 = 49$ $x_1 = \frac{-15 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 - 7}{4} = -5 \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-15 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 + 7}{4} = -2$	Doprowadzamy równanie do równania wielomianowego. Ponieważ dane równanie jest proporcją, to doprowadzamy je do postaci wielomianowej mnożąc „na krzyż” licznik i mianownik. Rozwiązujemy otrzymane równanie wielomianowe, korzystając ze wzorów $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = -5\frac{1}{2} \in D$ $x_2 = -2 \notin D$ Odp. Równanie ma jedno rozwiązanie: $-5\frac{1}{2}$	Sprawdzamy, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny równania
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------

Przykład 6.4.4. Rozwiąż równanie: $\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{x}{x+3}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenia: $x^2 - 9 \neq 0$ $x - 3 \neq 0$ $x + 3 \neq 0$ $a = 1, b = 0, c = -9$ $x \neq 3$ $x \neq -3$ $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-9) = 36$ $x_1 = \frac{0 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$ $x_2 = \frac{0 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$	Określamy dziedzinę równania. Przy rozwiązywaniu założenia $x^2 - 9 \neq 0$ korzystamy ze wzorów: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{x}{x+3}$ $\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ $\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - x(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ $\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2x+6-x^2+3x}{x^2-9}$	Z prawej strony równania wykonujemy odejmowanie. Sprowadzamy wyrażenia $\frac{2}{x-3}$ i $\frac{x}{x+3}$ do wspólnego mianownika $(x-3)(x+3)$
$\frac{5x-3}{x^2-9} = \frac{2x+6-x^2+3x}{x^2-9} \cdot x^2-9$ $5x-3 = 2x+6-x^2+3x$ $5x-3-2x-6+x^2-3x = 0$ $x^2-9 = 0$ $x = -3 \quad x = 3$	Doprowadzamy równanie do równania wielomianowego mnożąc obie strony równania przez $x^2 - 9$. Rozwiązujemy otrzymane równanie wielomianowe.
$x = -3 \notin D$ $x = 3 \notin D$ Odp. Równanie nie ma rozwiązania.	Sprawdzamy, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny równania

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 6.4.1. Rozwiąż równanie:

a) (3pkt.) $\frac{6}{x} = x + 5$

b) (3pkt.) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} = 2$

c) (3pkt.) $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Określenie dziedziny równania	1
2	Doprowadzenie równania do równania wielomianowego.	1
3	Podanie rozwiązań równania.	1